Manuale di Matematica per le applicazioni economiche Algebra lineare Funzioni di due variabili

Juan Gabriel Brida   Nicoletta Colletti

School of Economics and Manangement
Free University of Bozen - Bolzano

Autoren | Autori | Authors
Juan Gabriel Brida, Nicoletta Colletti

Umschlaggestaltung | Design di copertina | Cover design
DigiPrint, Bozen/Bolzano

Druck | Stampa | Printing
DigiPrint, Bozen/Bolzano

Vertrieb | Distribuzione | Distribution
UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK BOZEN
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA BOLZANO
UNIVERSITY LIBRARY OF BOZEN-BOLZANO
WWW.UNIBZ.IT/LIBRARY

ISBN 978-88-6046-021-9

Indice

Prefazione

Questo *Manuale*, come il precedente *Manuale di Matematica per le applicazioni economiche - Calcolo in una variabile*, del quale è il seguito, è finalizzato alla acquisizione del metodo matematico come importante strumento di indagine per le discipline economiche.

Poiché si è voluto porre l'accento sull'uso pratico dei contenuti e delle procedure di calcolo, piuttosto che su una loro eccessiva formalizzazione, gli argomenti sono trattati in modo elementare, fornendo definizioni di concetti, enunciati di teoremi e relativa interpretazione, evitando le dimostrazioni, e molti esempi.

Il libro è strutturato in due parti. La prima è dedicata alla teoria ed affronta nel capitolo 1 l'algebra lineare, in particolare le parti relative ai sistemi lineari, ai vettori ed alle matrici, e nel capitolo 2 le funzioni reali di due variabili reali, allo scopo di risolvere problemi di massimizzazione e minimizzazione libera e vincolata. Nella seconda parte vengono proposti numerosi esercizi di diversa tipologia, quali problemi a risposta aperta e quesiti a risposta multipla, di cui viene fornita la soluzione per facilitare gli studenti nell'apprendimento delle tecniche risolutive.

J.G.B. - N.C.

Bolzano, ottobre 2008

Parte I

Teoria

Capitolo 1

Algebra lineare

1.1 Introduzione

Le nozioni esposte in questo primo capitolo appartengono a quella parte della Matematica che va sotto il nome di algebra lineare. Essa ci insegnerà a lavorare con concetti come quelli di matrice, vettore e determinante, utili nella risoluzione di sistemi lineari, che sono presenti in moltissimi modelli matematici utilizzati dagli economisti, ma anche impiegati nei problemi di ottimizzazione di funzioni a più variabili.

1.2 Sistemi di equazioni lineari

1.2.1 Sistemi lineari 2×2 e $m \times n$

Un'equazione lineare nelle incognite x ed y è un'equazione di primo grado che può essere messa nella forma standard:

$$ax + by = c,$$

dove a, b e c sono costanti reali. La costante a è detta coefficiente di x, la costante b è detta coefficiente di y e la costante c è detta termine noto dell'equazione. Una soluzione dell'equazione lineare $ax + by = c$ è una coppia ordinata di valori (x_0, y_0) per cui si verifica l'uguaglianza $ax_0 + by_0 = c$. In questo caso si dice che (x_0, y_0) soddisfa l'equazione.

Per esempio, la coppia $(1, 2)$ è una soluzione dell'equazione lineare $3x + 2y = 7$.

Un sistema di equazioni lineari è un insieme di equazioni di primo grado con le medesime incognite. In particolare, un sistema di due equazioni nelle due incognite x ed y può essere scritto nella forma standard:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases},$$

dove a, b, c, d, e ed f sono costanti reali. Una soluzione del sistema è una coppia ordinata di valori (x_0, y_0) che soddisfa simultaneamente entrambe le equazioni del sistema.

Per esempio, la coppia $(1, 2)$ è una soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 2y = -3 \end{cases}.$$

Infatti, essa è soluzione sia di $3x + 2y = 7$ che di $x - 2y = -3$. Viceversa, $(3, -1)$ non è soluzione del sistema poiché non soddisfa la seconda equazione.

Un sistema di m equazioni lineari in n incognite è chiamato sistema $m \times n$. Esso può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

dove $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sono le incognite, le costanti reali $a_{ij}, i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, sono i coefficienti del sistema e i numeri reali $b_1, b_2, \cdots, b_m$ sono i termini noti. Se $m = n$, allora il sistema è detto quadrato. Una soluzione di un sistema $m \times n$ è una ennupla ordinata di valori $(s_1, s_2, ..., s_n)$ che soddisfa simultaneamente tutte le m equazioni del sistema.

Un sistema di equazioni lineari è detto omogeneo se tutti i termini noti sono nulli. Altrimenti, il sistema è detto non omogeneo. Un sistema omogeneo ha sempre una soluzione, detta banale, che si ottiene attribuendo il valore zero a tutte le incognite.

Un sistema di equazioni è detto consistente se ha almeno una soluzione, mentre è detto inconsistente se non ammette soluzioni. Poiché un sistema omogeneo ammette la soluzione banale, esso non può essere inconsistente.

Si può dimostrare che per ogni sistema di equazioni lineari si verifica una delle seguenti situazioni:

1. esso non ammette nessuna soluzione;

2. esso ammette un'unica soluzione;

3. esso ammette un numero infinito di soluzioni.

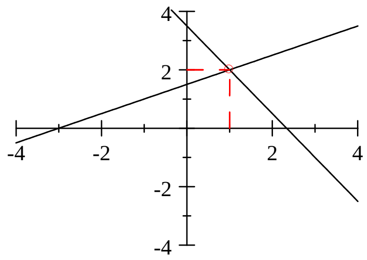
I sistemi di equazioni lineari 2×2 possono essere descritti geometricamente interpretando ogni equazione come una retta nel piano cartesiano. In particolare, il precedente risultato può essere espresso nel modo seguente:

1. il sistema non ha soluzione se le due rette sono parallele;

2. il sistema ha un'unica soluzione se le due rette sono distinte e non parallele, per cui si intersecano in un punto;

3. il sistema ha un numero infinito di soluzioni se le due rette coincidono.

Esempio 1 *Le rette* $3x + 2y = 7$ *e* $x - 2y = -3$ *si incontrano nel punto* $(1, 2)$.



1.2.2 Metodo di eliminazione di Gauss

La soluzione di un sistema quadrato di equazioni lineari si può determinare con un procedimento di eliminazione delle incognite, detto di Gauss, attraverso il quale il sistema viene ridotto ad una sola equazione ad una incognita.

Considerando un sistema lineare 2×2, l'algoritmo consiste in due parti:

1. moltiplicazione di ogni equazione per una costante, in modo tale che i coefficienti di una delle incognite (di solito x) siano opposti e somma delle due equazioni in modo da ottenere una nuova equazione E avente una sola incognita (di solito y);

2. risoluzione dell'equazione E e, ammesso che essa abbia una soluzione unica, sostituzione del valore trovato in una delle due equazioni di partenza per trovare il valore dell'altra incognita.

Esempio 2 *Consideriamo il sistema:*

$$\begin{cases} 6x - 5y = 14 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}.$$

Moltiplichiamo la seconda equazione per -2 :

$$\begin{cases} 6x - 5y = 14 \\ -6x - 14y = -4 \end{cases}.$$

Sommando le due equazioni, si ottiene:

$$0x - 19y = 10.$$

Risolvendo rispetto ad y, *si ha:*

$$y = -\frac{10}{19}.$$