

Manuale di Matematica
per le applicazioni economiche
Calcolo in una variabile

Juan Gabriel Brida Nicoletta Colletti

School of Economics and Management
Free University of Bozen - Bolzano

Autoren | Autori | Authors
Juan Gabriel Brida, Nicoletta Colletti

Umschlaggestaltung | Design di copertina | Cover design
DigiPrint, Bozen/Bolzano

Druck | Stampa | Printing
DigiPrint, Bozen/Bolzano

Vertrieb | Distribuzione | Distribution
UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK BOZEN
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA BOLZANO
UNIVERSITY LIBRARY OF BOZEN-BOLZANO
WWW.UNIBZ.IT/LIBRARY

© 2008 by Bozen-Bolzano University Press
Bozen/Bolzano
All rights reserved

ISBN 978-88-6046-016-5

Indice

I	Teoria	1
1	Funzioni di una variabile	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Grafici di funzioni	3
1.2.1	Alcuni grafici importanti	4
1.3	Esempio economico: domanda e offerta	5
1.4	Funzione monotona	5
1.5	Funzione convessa	6
1.6	Funzione composta	7
1.7	Funzione inversa	8
1.8	Conclusioni	9
2	Limiti - Continuità - Serie	11
2.1	Introduzione	11
2.2	Limiti	11
2.2.1	Limite finito per x tendente ad a, a^+ e a^-	11
2.2.2	Limite infinito per x tendente ad a, a^+ e a^-	13
2.2.3	Limite finito per x tendente all'infinito	14
2.2.4	Limite infinito per x tendente all'infinito	15
2.2.5	Limiti standard	16
2.2.6	Regole per il calcolo dei limiti	18
2.2.7	Risoluzione delle forme indeterminate	20
2.2.8	Asintoti	22
2.3	Continuità	23
2.3.1	Definizione di continuità	23
2.3.2	Proprietà delle funzioni continue	24
2.3.3	Continuità delle funzioni elementari	24
2.3.4	Il teorema del valore intermedio	25
2.3.5	Il teorema di Weierstrass	26
2.4	Serie	26
2.4.1	Introduzione	26
2.4.2	Proprietà delle serie	27
2.4.3	Serie geometrica	28

2.4.4	Esempi economici	29
3	Derivate	31
3.1	Introduzione	31
3.2	Esempio economico	32
3.3	Retta tangente	33
3.4	Approssimazione lineare	34
3.5	Derivate di ordine superiore al primo	34
3.6	Regole di derivazione	35
3.6.1	Derivate delle funzioni elementari	35
3.6.2	Derivata dell'addizione e della sottrazione di due funzioni	35
3.6.3	Derivata del prodotto di due funzioni	36
3.6.4	Derivata del quoziente di due funzioni	36
3.6.5	Derivata della funzione composta	36
3.7	Esempio economico: l'elasticità	37
3.7.1	Elasticità e domanda	37
3.7.2	Elasticità e ricavo	38
3.8	Regola di de L'Hôpital	38
3.8.1	Forma indeterminata $\frac{0}{0}$	39
3.8.2	Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$	39
3.8.3	Forme indeterminate $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$	39
3.9	Proprietà delle derivate	40
3.10	Massimi e minimi relativi	43
3.11	Massimi e minimi assoluti	45
3.12	Esempio economico	46
3.13	Convessità e concavità	47
4	Integrali	51
4.1	Integrali indefiniti	51
4.1.1	Introduzione	51
4.1.2	Alcuni integrali importanti	52
4.1.3	Regole di integrazione	53
4.1.4	Metodi di integrazione	54
4.2	Aree ed integrali definiti	57
4.2.1	Definizione di integrale definito	57
4.2.2	Relazione tra integrale indefinito e integrale definito . . .	58
4.2.3	Proprietà dell'integrale definito	58
4.2.4	Calcolo di aree	59
4.3	Esempio economico: surplus del consumatore e del produttore . .	63
4.4	Integrali impropri: intervalli di integrazione infiniti	64

5	Equazioni differenziali del primo ordine	71
5.1	Introduzione	71
5.2	Equazioni differenziali a variabili separabili	72
5.3	Equazioni lineari del primo ordine	75
5.4	Teoria qualitativa e stabilità	76
5.5	Esempi economici	80
5.5.1	Legge della crescita naturale	80
5.5.2	Crescita logistica	81
II	Esercizi	83
6	Precalculus	85
6.1	Esercizi	85
6.2	Soluzioni	89
7	Funzioni di una variabile	99
7.1	Esercizi	99
7.2	Soluzioni	100
8	Limiti - Continuità - Serie	109
8.1	Esercizi	109
8.2	Soluzioni	115
9	Derivate	123
9.1	Esercizi	123
9.2	Soluzioni	128
10	Integrali	135
10.1	Esercizi	135
10.2	Soluzioni	144
11	Equazioni differenziali	155
11.1	Esercizi	155
11.2	Soluzioni	158
12	Quesiti a risposta multipla	165
12.1	Quesiti	165
12.2	Soluzioni	201
	Bibliografia essenziale	203

Prefazione

Questo *Manuale* è finalizzato all'acquisizione del metodo matematico come importante strumento di indagine per le discipline economiche. Poiché si è voluto porre l'accento sull'uso pratico dei contenuti e delle tecniche di calcolo, piuttosto che su una loro eccessiva formalizzazione, gli argomenti sono trattati in modo elementare, fornendo definizioni di concetti, enunciati di teoremi e relativa interpretazione, evitando le dimostrazioni.

Il libro è strutturato in due parti. La prima è dedicata alla teoria e affronta il calcolo differenziale nel caso di funzioni di una sola variabile (capitoli 1, 2 e 3), l'integrazione (capitolo 4) e le equazioni differenziali del primo ordine (capitolo 5). Nella seconda parte vengono proposti numerosi esercizi di diversa tipologia, quali problemi a risposta aperta e quesiti a risposta multipla, di cui viene fornita la soluzione per facilitare gli studenti nell'apprendimento delle tecniche risolutive. Il capitolo 6 contiene esercizi di algebra elementare e di geometria analitica per consentire un recupero dei prerequisiti indispensabili alla comprensione dei contenuti di questo *Manuale*, mentre i capitoli successivi propongono esercizi basati sugli argomenti presentati nella prima parte del testo.

J.G.B. - N.C.

Bolzano, maggio 2008

Parte I

Teoria

Capitolo 1

Funzioni di una variabile

1.1 Introduzione

Le funzioni sono importanti in ogni area della matematica pura ed applicata. Per esempio, nel linguaggio dell'analisi economica si trovano spesso espressioni come funzione di domanda e di offerta oppure funzione di costo e di produzione.

Definizione 1 Una funzione reale di una variabile reale x avente come dominio il sottoinsieme dei numeri reali D , cioè una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è una regola che assegna un unico numero reale y ad ogni numero x appartenente a D .

La variabile x si chiama indipendente, mentre y è la variabile dipendente, in quanto il suo valore dipende da quello di x . Il dominio della funzione f è l'insieme dei possibili valori della variabile indipendente, mentre l'insieme immagine è l'insieme dei corrispondenti valori della variabile dipendente.

Spesso una funzione viene definita attraverso una formula algebrica. In questo caso, a meno che il dominio sia stato espressamente indicato, esso consiste in tutti i valori della variabile indipendente per i quali la formula fornisce come risultato un solo valore.

Esempio 2 Il dominio della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$ è l'insieme $D = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

1.2 Grafici di funzioni

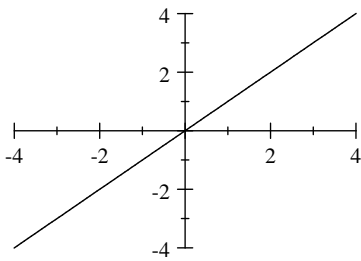
Un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, detto anche piano xOy , si ottiene disegnando due rette perpendicolari, chiamate assi coordinati. I due assi sono rispettivamente l'asse delle x o delle ascisse, quello orizzontale, e l'asse delle y o delle ordinate, quello verticale. Il punto di intersezione O degli assi è chiamato origine. Ogni punto P del piano può essere rappresentato da una coppia ordinata

di numeri reali (x, y) e ogni coppia ordinata di numeri reali rappresenta uno ed un solo punto del piano.

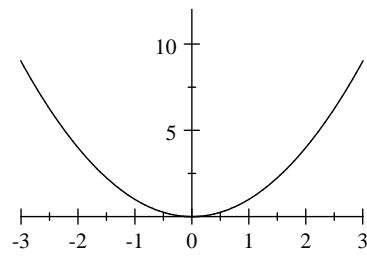
Definizione 3 Il grafico di una funzione f è l'insieme di tutti i punti del piano $(x, f(x))$, dove x appartiene al dominio di f .

1.2.1 Alcuni grafici importanti

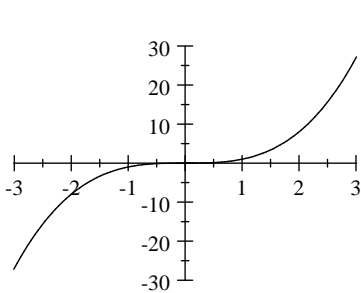
Alcune funzioni sono così frequenti nelle applicazioni che è opportuno imparare a riconoscerne i rispettivi grafici.



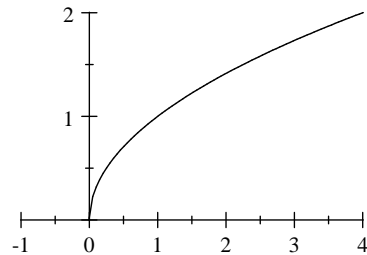
$$y = x$$



$$y = x^2$$



$$y = x^3$$



$$y = \sqrt{x}$$